الرياضيات

5

التحليل (5)

السنة: الثالثة

الفصل: الثاني

الدكتور: نايف طلي

3

PLUS LIBRARY

تعرفنا في المحاضرة السابقة على الدوال ذات التغير المحدود وسنكمل بهذا البحث في هذه المحاضرة

خواص الدوال ذات التغير المحدود: (سوف نثبت هذه الخواص في المحاضرة القادمة)

1) إذا كانت f د.ت.م على $[a,b]$ فإنها محدودة على $[a,b]$. لكن العكس غير صحيح بالضرورة
2) إذا كانت f ذ.ت.م على $[a,b]$ فإن $|f|$ د.ت.م على $[a,b]$. لكن العكس غير صحيح بالضرورة
3) **الخواص الخطية:** إذا كانت f د.ت.م على $[a,b]$ فإن:
   a) αf دالة د.ت.م على $[a,b]$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$.
   b) $\frac{1}{f}$ دالة د.ت.م محدود على $[a,b]$ حيث:
$$\forall\, x \in [a,b]: |f(x)| \geq c > 0, \quad c \in \mathbb{R}^+$$
4) اذا كانت f, g دالتين كل منهما د.ت.م على $[a,b]$ فإن:
   A. $f+g$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$.
   B. $f-g$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$.
   C. $f \cdot g$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$.
   D. $\frac{f}{g}$ دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ حيث
$$\forall\, x \in [a,b]: \quad |g(x)| \geq c > 0, \quad c \in \mathbb{R}^+$$

ملاحظة: يمكن تعميم الخاصة السابقة على n حد ولكن لا نستطيع تعميمها على عدد غير منتهي بالتحليل (يمكن دراسة ذلك بالتحليل التابعي)

5) إذا كانت f د.ت.م على $[a,b]$ وكان $a<c<b$ فإن f د.ت.م على كل من $[a,c],[c,b]$ وبالعكس ويكون
$$\underset{a}{\overset{b}{\vee}} f = \underset{a}{\overset{c}{\vee}} f + \underset{c}{\overset{b}{\vee}} f$$

نتائج: اذا كانت f د.ت.م على $[a,b]$ فإن:

1) f^n د.ت.م على $[a,b]$ حيث $n \in \mathbb{N}$ عدد ثابت
2) $\frac{1}{f^n}$ د.ت.م على $[a,b]$ حيث n عدد ثابت حيث:
$$\forall\, x \in [a,b]: |f(x)| \geq c > 0, \quad c \in \mathbb{R}^+$$
3) $\underset{a}{\overset{b}{\vee}} f = \underset{a}{\overset{c_1}{\vee}} f + \underset{c_1}{\overset{c_2}{\vee}} f + \cdots + \underset{c_n}{\overset{b}{\vee}} f$ بحيث $c_i \in]a,b[$

معايير الدوال ذات التغير المحدود

1) إذا كانت الدالة f معرفة ومطردة على $[a,b]$ فإنها دالة ذات تغير محدود على $[a,b]$ ويتحقق:

$$\overset{b}{\underset{a}{\vee}}(f) = |f(b) - f(a)|$$

برهان خواص الدوال ذات التغير المحدود على $[a,b]$:

1) إذا كانت f ذ.ت.م على $[a,b]$ فإنها محدودة لكن العكس غير صحيح بالضرورة.

أي f د.ت.م على $[a,b]$ $\Leftarrow$ f محدودة على $[a,b]$

الفرض: f دالة ذات تغير محدود عندئذ:

$$\overset{b}{\underset{a}{\vee}}(f) = \underbrace{\sup}_{p\in P[a,b]} V(f,p) < \infty$$

الطلب: f محدودة أي يجب برهان:

$$\exists\, M > 0 : \ |f(x)| \le M \quad \forall\, x \in [a,b]$$

البرهان: من أجل التجزئة:

$$P = \{a, x, b\ ;\ a < x < b\}$$

$$\Rightarrow V(f,P) = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \le \overset{b}{\underset{a}{\vee}}(f) < \infty$$

والآن لنبرهن أن f محدودة:

$$\forall\, x \in [a,b]: |f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)|$$

$$\Rightarrow |f(x)| \le |f(x) - f(a)| + f(a)$$

$$\Rightarrow |f(x)| \le \overset{b}{\underset{a}{\vee}} f + f(a) = M$$

وبالتالي:

$$\exists\, M > 0\ ;\ \ |f(x)| \le M \quad \forall\, x \in [a,b]$$

وبالتالي f محدودة على $[a,b]$.

العكس: غير صحيح بالضرورة والمثال المعاكس:

مثال: إذا كانت الدالة f معرفة على $[0,1]$ كما يلي:

$$f(x) = \begin{cases} x.\cos\dfrac{\pi}{2x} & ; x \in]0,1] \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$$

والمطلوب:

1) بيّن أن الدالة f مستمرة على المجال $[0,1]$.
2) بيّن أن الدالة f محدودة على المجال $[0,1]$.
3) بيّن أن الدالة f ليست ذ.ت.م.

الحل:

1) f مستمرة عند $x_0 \in]0,1[$ لأن f معرفة على $]0,1[$ و $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ موجودة

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <\,>}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <\,>}} x.\cos\frac{\pi}{2x} = f(x_0)$$

من أجل $x_0 = 0$ نجد أن f معرفة و $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ موجودة

$$x_0 = 0 \Rightarrow \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} x.\cos\frac{\pi}{2x} = 0 = f(0)$$

من أجل $x_0 = 1$ نجد أن f معرفة و $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ موجودة

$$x_0 = 1 \Rightarrow \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} x.\cos\frac{\pi}{2x} = 0 = f(1)$$

$\Leftarrow$ الدالة مستمرة على المجال $[0,1]$

طريقة ثانية: التابع $\frac{\pi}{2x}$ مستمر على كامل مجموعة تعريفه $\mathbb{R}^*$، والتابعين x , $\cos x$ مستمرين على $\mathbb{R}$ إذاً التركيب والضرب لهذه التوابع (بحيث تكون معرّفة) هو تابع f مستمر على $]0,1[$ ولدينا:

f مستمر من اليمين عند $x_0 = 0$ لأن: $f(0) = 0$ و لأن: $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} x.\cos\frac{\pi}{2x} = 0$

((حيث $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ >}} x = 0$ لا متناهي في الصغر و $\left|\cos\frac{\pi}{2x}\right| \leq 1$ محدود))

يكون $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0) = 0$

وبما أن f مستمر عند 1 فهو مستمر عند1 من اليسار وبالتالي التابع f مستمر على المجال $[0,1]$.

---

2) لنبرهن أن f محدود أي:

بما أن: $\forall\, x \in [0,1] \quad \left|cos\frac{\pi}{2x}\right| \leq 1$ فإن:

$$f(0) = 0 \leq 1 \quad \text{و} \quad \underbrace{|x|.\left|cos\frac{\pi}{2x}\right|}_{|x|\leq 1 \text{ حيث}} = \left|x \cdot cos\frac{\pi}{2x}\right| \leq 1 \,, \forall\, x \in]0\,,1]$$

$$\Longrightarrow |f(x)| \leq 1 \;\; \forall\, x \in [0,1]$$

ومنه $\exists\, 1 > 0 \,; |f(x)| \leq 1 \,, \forall\, x \in [0,1]$ إذاً f محدود على المجال $[0,1]$.

---

3) لنختر تجزئة للمجال $[0,1]$ بحيث نجد: $\overset{1}{\underset{0}{V}} f = \infty$

لنختر P التجزئة النونية كما يلي: (بعد حل عدد من التمارين والتمرس يستطيع الطالب إيجاد التجزئة المناسبة بسهولة)

$$P = \left\{0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1} < \cdots < \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1\right\}$$

$$V(f,p)=|f(x_1)-f(x_0)|+|f(x_2)-f(x_1)|+\cdots+|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})| \\ +|f(x_n)-f(x_{n-1})|$$

$$V(f,p)=\left|f\left(\frac{1}{2n}\right)-f(0)\right|+\left|f\left(\frac{1}{2n-1}\right)-f\left(\frac{1}{2n}\right)\right| \\ +\left|f\left(\frac{1}{2n-2}\right)-f\left(\frac{1}{2n-1}\right)\right|+\cdots+\left|f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(\frac{1}{3}\right)\right| \\ +\left|f(1)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|$$

$$V(f,p)=\left|\frac{1}{2n}\cos n\pi-0\right|+\left|\frac{1}{2n-1}\cos\frac{2n-1}{2}\pi-\frac{1}{2n}\cos n\pi\right|+\cdots \\ +\left|\frac{1}{2}\cos\pi-\frac{1}{3}\cos\frac{3\pi}{2}\right|+\left|\cos\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cos\pi\right|$$

$$=\left|\frac{1}{2n}\cos n\pi-0\right|+\left|0-\frac{1}{2n}\cos n\pi\right|+\cdots+\left|\frac{1}{2}\cos\pi-0\right|+\left|0-\frac{1}{2}\cos\pi\right|$$

نلاحظ أن: $f(x_n)=0$ عندما $x_n=\frac{1}{2n-1}$ لأن $2n-1$ عدد فردي ($\cos\frac{2n-1}{2}\pi=0$).

$$\Longrightarrow V(f,p)=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-2}+\frac{1}{2n-2}+\cdots+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$=2\left(\frac{1}{2n}\right)+2\left(\frac{1}{2(n-1)}\right)+\cdots+2\left(\frac{1}{2}\right)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

لنأخذ الآن sup هذه المجاميع فنجد أن:

$$\overset{1}{\underset{0}{V}}f=\sup_{P\in P[0,1]}V(f,p)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=+\infty$$

لأن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ متباعدة ومنه فإن f ليست دالة ذات تغير محدود.

ملاحظة : $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

انتهت المحاضرة

Math Mad Team

إعداد: عبد الرحمن خالد الجامع، سمير الحاج علي.